36 積分の計算

308

x 軸との接点を $(\alpha,\ f(\alpha))$ とすると， $f'(\alpha)=0$ かつ $f(\alpha)=0$

これと，

与式より， $f'(x)=(x-2)^2$

$f(x)$ の定数項を C とすると，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\int f'(x)dx\\
&=\int (x-2)^2 dx\\
&=\frac{1}{3}(x-2)^3+C\\
&=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x+C
\end{aligned}
$$

より，

$f'(\alpha)=(\alpha-2)^2=0$ ・・・①

$f(\alpha)=\frac{1}{3}\alpha^3-2\alpha^2+4\alpha+C=0$ ・・・②

よって，①より， $\alpha=2$

これを②に代入し，C を求めると， $C=-\frac{8}{3}$

ゆえに， $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-\frac{8}{3}$

309

$$
\begin{aligned}
x^3-x^2-4x+4&=x^2(x-1)-4(x-1)\\
&=(x^2-4)(x-1)\\
&=(x+2)(x-1)(x-2)
\end{aligned}
$$

より，

積分区間 $0\le x\le 2$ において，$0\le x\le 1$ で $x^3-x^2-4x+4\ge 0$，$1\le x\le 2$ で $x^3-x^2-4x+4\le 0$

よって，

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_0^1(x^3-x^2-4x+4)dx+\int_1^2(-x^3+x^2+4x-4)dx\\
&=\int_0^1(x^3-x^2-4x+4)dx+\int_2^1(x^3-x^2-4x+4)dx\\
&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_2^1\\
&=\frac{23}{12}\times 2-\frac{4}{3}\\
&=\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

310

(1)

$f'(-1)=0,\ f'(2)=0$，$-1<x<2$ で $f'(x)<0$，$x<-1,\ 2<x$ で $f'(x)>0$ より，

$f'(x)=a(x+1)(x-2)$（$a>0$）

よって，

$$\int_0^2 f'(x)dx = a\int_0^2 (x+1)(x-2)dx$$

$$= a\int_0^2 \{(x-2)+3\}(x-2)dx$$

$$= a\int_0^2 \{(x-2)^2+3(x-2)\}dx$$

$$= a\left[\frac{1}{3}(x-2)^3+\frac{3}{2}(x-2)^2\right]_0^2$$

$$= -\frac{10}{3}a$$

これと，$\int_0^2 f'(x)dx=-5$ より，$-\frac{10}{3}a=-5$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

よって，$f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)(x-2)$ または，これを展開することにより，$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-3$

(2)

$f(x)$ の定数項を C とすると，

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-3\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-3x+C$$

より，

極大値と極小値の差＝ $f(-1)-f(2)=\frac{7}{4}+C-(-5+C)=\frac{27}{4}$

311

(1)

$$\int_k^{k+1}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)dx=k^3+\left(a+\frac{3}{2}\right)k^2+(a+b+1)k+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c+\frac{1}{4}$$

条件より，$k^3+\left(a+\frac{3}{2}\right)k^2+(a+b+1)k+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c+\frac{1}{4}$ と k^3 は恒等式である。

よって，連立方程式 $\begin{cases} a+\frac{3}{2}=0 \\ a+b+1=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c+\frac{1}{4}=0 \end{cases}$ を解くことにより，$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=0$

(2)

(1)より，$\int_k^{k+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=k^3$

ここで，簡単のため $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ とおくと，

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_1^{n+1} f(x)dx$$

よって，

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+n^3&=\int_1^{n+1} f(x)dx\\&=\int_1^{n+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx\\&=\left[\frac{x^4-2x^3+x^2}{4}\right]_1^{n+1}\\&=\frac{1}{4}\left[x^2(x-1)^2\right]_1^{n+1}\\&=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

312

$p(x)$ と $q(x)$ の定数項をそれぞれ C_1，C_2 とすると，

よって，$p(0)=C_1$，$q(0)=C_2$

また，条件より，$p(0)=f(0)+g(0)=3$，$q(0)=f(0)g(0)=2$

よって，$C_1=3$，$C_2=2$

ゆえに，$p(x)=3x+3$，$q(x)=2x^2+kx+2$

条件より，$f(x), g(x)$ を解とする t の 2 次方程式は $t^2-p(x)t+q(x)=0$ で与えられるから，

$f(x),\ g(x)$ の式は，解の公式により，$\dfrac{p(x)\pm\sqrt{\{p(x)\}^2-4q(x)}}{2}$ となり，

$f(x),\ g(x)$ が整式であることから，$\{p(x)\}^2-4q(x)$ はある整式の 2 乗である。

したがって，

$$\begin{aligned}\{p(x)\}^2-4q(x)&=(3x+3)^2-4(2x^2+kx+2)\\&=x^2-2(2k-9)x+1\end{aligned}$$

より，

$x^2-2(2k-9)x+1$ は重解をもつ。

よって，判別式を D とすると，$D=0$ および $\dfrac{D}{4}=(2k-9)^2-1$ より，$(2k-9)^2-1=0$

これより，$2k-9=\pm1$　$\therefore k=4,\ 5$

313

$\int_0^1 f(x)dx$ より，積分区間は $0\leq x\leq 1$ である。

したがって，$f(x)=\int_0^1\left|x^2-t^2\right|dt$ において，$0\leq x\leq 1$ として $f(x)$ を求めればよい。

よって，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^1\left|x^2-t^2\right|dt\\&=\int_x^1\left(-x^2+t^2\right)dt+\int_0^x\left(x^2-t^2\right)dt\\&=\int_1^x\left(x^2-t^2\right)dt+\int_0^x\left(x^2-t^2\right)dt\\&=\left[x^2t-\frac{t^3}{3}\right]_1^x+\left[x^2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^x\\&=\left(x^3-\frac{x^3}{3}\right)\times2-\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}\right)dx\\&=\frac{1}{3}\left[x^4-x^3+x\right]_0^1\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

314

(1)

条件より，$[x]\leq x<[x]+1$

よって，$x-[x]\geq 0$ ・・・① かつ $1-x+[x]\geq 0$ ・・・②

$$
\begin{aligned}
f(x)-x&=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2-x\\
&=(x-[x])-(x-[x])^2\\
&=(x-[x])(1-x+[x])
\end{aligned}
$$

ゆえに，①，②より，$f(x)-x\geq 0$ すなわち $f(x)\geq x$

(2)

$[x]\leq x<[x]+1$ より，$[x]+1\leq x+1<([x]+1)+1$

一方，$[x+1]\leq x+1<[x+1]+1$

よって，$[x+1]=[x]+1$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
f(x+1)&=[x+1]+2(x+1-[x+1])-(x+1-[x+1])^2\\
&=[x]+1+2\{x+1-([x]+1)\}-\{x+1-([x]+1)\}^2\\
&=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2+1\\
&=f(x)+1
\end{aligned}
$$

(3)

$0\leq x<1$ のとき

$[x]=0$ より，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=2x-x^2\\
&=-(x-1)^2+1
\end{aligned}
$$

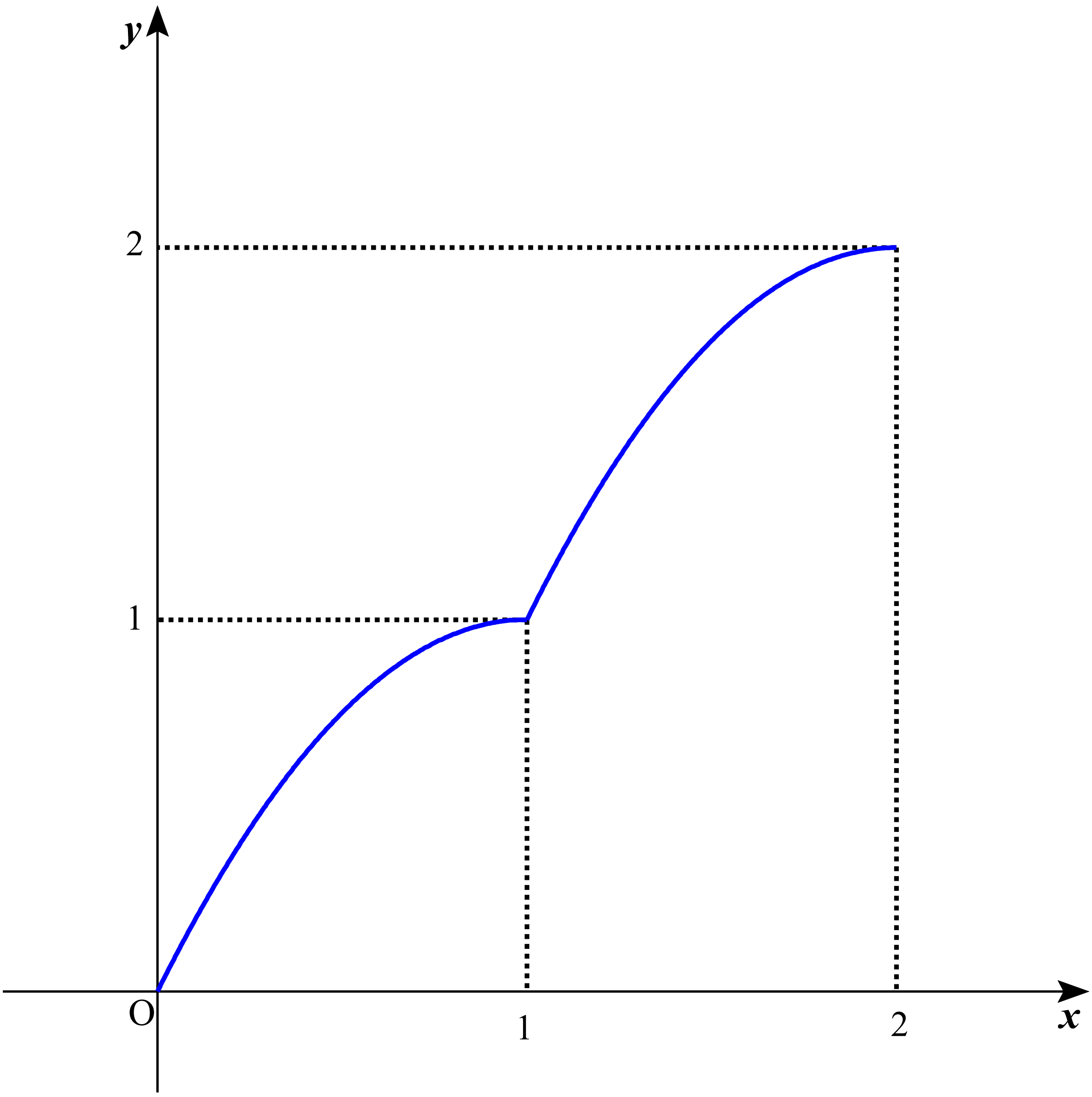
$1\leq x<2$ のとき

$[x]=1$ より，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=1+2(x-1)-(x-1)^2\\
&=-x^2+4x-2\\
&=-(x-2)^2+2
\end{aligned}
$$

$x=2$ のとき

$[x]=2$ より，$f(x)=2$



(4)

$0 \leq a < 1$，$1 \leq a+1 < 2$ より，

$$\int_a^{a+1} f(x)dx = \int_1^{a+1}\left(-x^2+4x-2\right)dx + \int_a^1\left(-x^2+2x\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-2x\right]_1^{a+1} + \left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_a^1$$

$$= a + \frac{2}{3}$$

315

$f(-1)=-1$ および $f(-1)=a-b+1$ より，$a-b+c=-1$　・・・①

$f(1)=1$ および $f(1)=a+b+1$ より，$a+b+c=1$　・・・②

①，②より，$c=-a$，$b=1$

よって，$f(x)=ax^2+x-a$　・・・③

$-1\leq x\leq 1$ において，$f(x)\leq 3x^2-1$ より，$f(x)-3x^2+1\leq 0$

これと③より，$f(x)-3x^2+1=(a-3)x^2+x-a+1\leq 0$

ここで，$g(x)=(a-3)x^2+x-a+1$ とおき，$-1\leq x\leq 1$ において $f(x)-3x^2+1\leq 0$，

すなわち $g(x)\leq 0$ が成り立つときの a の値の範囲を求めると，

(i) $a=3$ のとき

$g(x)=x-2$ より，$-1\leq x\leq 1$ において $-3\leq g(x)\leq -1$

よって，$g(x)\leq 0$ が成り立つ。

(ii) $a\neq 3$ のとき

$$g(x)=(a-3)x^2+x-a+1$$
$$=(a-3)\left\{x+\frac{1}{2(a-3)}\right\}+\frac{-4a^2+16a-13}{4(a-3)}$$

(ii-1) 放物線 $g(x)$ が上に凸かつ軸 $x=-\dfrac{1}{2(a-3)}$ が $-1\leq x\leq 1$ の範囲にあるとき

上に凸かつ軸が $-1\leq x\leq 1$ の範囲にあるのは,

$a-3<0$ かつ $-1\leq -\dfrac{1}{2(a-3)}\leq 1$ より，$a\leq\dfrac{5}{2}$　・・・④

このとき，$-1\leq x\leq 1$ における $g(x)$ の最大値は $g\left(-\dfrac{1}{2(a-3)}\right)=\dfrac{-4a^2+16a-13}{4(a-3)}$ である。

よって，$a-3<0$ より，この値が 0 以下ならば $-4a^2+16a-13\geq 0$

これを解くと，$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leq a\leq\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$　・・・⑤

④かつ⑤より，$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leq a\leq\dfrac{5}{2}$

(ii-2) 放物線 $g(x)$ が上に凸かつ軸 $x=-\dfrac{1}{2(a-3)}$ が $x<-1$ または $1<x$ の範囲にあるとき

上に凸かつ軸が $x<-1$ または $1<x$ の範囲にあるのは

$a-3<0$ かつ $\left(-\dfrac{1}{2(a-3)}<-1\quad\text{または}\quad 1<-\dfrac{1}{2(a-3)}\right)$ より，$\dfrac{5}{2}<a<3$

このとき，$-1\leq x\leq 1$ における $g(x)$ の最大値は $g(1)=-1$ となり，$g(x)\leq 0$ が成り立つ。

よって，$\dfrac{5}{2}<a<3$

(ii-3) 放物線 $g(x)$ が下に凸，すなわち $a>3$ のとき

$g(-1)=-3<0$ かつ $g(1)=-1<0$ より，$-1\leq x\leq 1$ において $g(x)\leq 0$ が成り立つ。

よって，$a>3$ のとき $g(x)\leq 0$

(i)～(ii-3)より，

$-1\leq x\leq 1$ において $g(x)\leq 0$ すなわち $f(x)\leq 3x^2-1$ が成り立つ a の値の範囲は

$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leq a$ ・・・⑥

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1}(2ax+1)^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(4a^2x^2+4ax+1\right)dx \\
&= 2\int_{0}^{1}\left(4a^2x^2+1\right)dx \\
&= 2\left[\frac{4a^2}{3}x^3+x\right]_0^1 \\
&= 2\left(\frac{4a^2}{3}+1\right)
\end{aligned}$$

および⑥より，

I のとりうる値の範囲は $I\geq 2\left\{\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2+1\right\}=\dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}$